Ms. ital.
Oct. 5

I

Ms. ital. oct. 5.

(acc. 1891. 121.)

II

Manuscript von

Dom. Chelini

Lag in dem von Dirichlet
stammenden Exemplar von
Chelinis Geometria analitica.

Osservazioni sull'equazione cubica per la quale si determinano gli assi principali nelle superficie di second'ordine, allorchè queste sono riportate ad assi obliquangoli.

L'equazione di secondo grado

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 \\ By^2 \\ Cz^2 \end{array}\right. + 2 \left|\begin{array}{l} A'yz \\ B'zx \\ C'xy \end{array}\right. - 2 \left|\begin{array}{l} A''x \\ B''y \\ C''z \end{array}\right. - D = 0$$

fra tre coordinate obliquangole x, y, z, e a coefficienti reali, si può sempre ridurre, com'è noto, alla forma

$$Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 + 2L'x + R = 0,$$

ove x', y', z' sono coordinate rettangole, ed L, M, N sono le radici dell'equazione cubica (pag. 192.)

$$(A) \qquad H^2 p^3 - \left\{\begin{array}{l} A \operatorname{sen}^2 X \\ B \operatorname{sen}^2 Y \\ C \operatorname{sen}^2 Z \end{array}\right. - 2 \left|\begin{array}{l} A' \operatorname{sen} Y \operatorname{sen} Z \cos x \\ B' \operatorname{sen} Z \operatorname{sen} X \cos y \\ C' \operatorname{sen} X \operatorname{sen} Y \cos z \end{array}\right\} p^2$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} BC - A'^2 \\ CA - B'^2 \\ AB - C'^2 \end{array}\right. - 2 \left|\begin{array}{l} (AA' - B'C') \cos X \\ (BB' - C'A') \cos Y \\ (CC' - A'B') \cos Z \end{array}\right\} p - U = 0.$$

Qui le lettere X, Y, Z. designano gli angoli yz, zx, xy degli assi coordinati positivi; le lettere $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ poste sotto i simboli trigonometrici rappresentano, nel triedro determinato dagli assi positivi $\underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}$, gli angoli diedri i cui spigoli sono rispettivamente gli assi $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$; ed

$$H = \operatorname{sen} Y \operatorname{sen} Z \operatorname{sen} x, \quad U = ABC + 2A'B'C' - AA'^2 - BB'^2 - CC'^2.$$

Ciò posto, l'oggetto di questa mia nota è

1°. Provare in un modo diretto la realità delle radici dell'equazione (A), e determinare insieme le condizioni dell'uguaglianza di tali radici;

2°. Assegnare le formule più semplici per la determinazione degli assi principali.

Ex Biblioth. Regia Berolinensi.

Queste cose, benchè spesso trattate ed in più modi nel caso degli assi ortogonali, non pare che siano ancora state considerate sotto il punto di vista più semplice nel caso generale degli assi obliquangoli.

I.

Il metodo che io seguo nel dimostrare la realità delle radici, è analogo a quello tenuto dal Sig. Cauchy nel caso degli assi ortogonali.

L'equazione (A) si può anche scrivere sotto la forma

$$(A_1) \qquad 0 = (p-A)(p-B)(p-C) - \left\{ \begin{array}{l} (p-A)(p\cos X - A')^2 \\ (p-B)(p\cos Y - B')^2 \\ (p-C)(p\cos Z - C')^2 \end{array} \right.$$

$$+ 2(p\cos X - A')(p\cos Y - B')(p\cos Z - C').$$

Supposto che le quantità A, B, C, siano disposte in ordine di grandezza crescente, cominciamo dall'osservare che le radici p', p'' dell'equazione quadratica

$$0 = (p-B)(p-C) - (p\cos X - A')^2$$

$$= p^2 \operatorname{sen}^2 X - (B + C - 2A'\cos X)p + BC - A'^2,$$

sono sempre reali, e comprese, l'una p' tra $-\infty$ e la minore delle due quantità B e C; e l'altra p'' tra la maggiore di queste e $+\infty$. Infatti, risolvendo cotesta equazione, la quantità sotto il vincolo radicale è

$$(B + C - 2A'\cos X)^2 - 4(BC - A'^2)\operatorname{sen}^2 X = (B-C)^2 \operatorname{sen}^2 X + [(B+C)\cos X - 2A']^2.$$

Inoltre, se nell'equazione si fa

$$p = B, \quad p = C,$$

il risultato sarà $= -(p\cos X - A')^2$, quantità *negativa*; ma se, divisa per p^2, si fa

$$p = \pm\infty,$$

il risultato sarà $= \operatorname{sen}^2 X$, quantità *positiva*.

Le radici p', p'' siano disuguali tra loro, e diverse dalle radici dell'equazione cubica. In questa ipotesi, se le sostituiamo a p nell'equazione cubica (A_1), ed osserviamo essere

$$\sqrt{(p'-B)(p'-C)} = p'\cos X - A', \quad \sqrt{(p''-B)(p''-C)} = p''\cos X - A',$$

otterremo, per la sostituzione di p',

$$\begin{array}{l}(B-p')(p'\cos Y-B')^2 \\ (C-p')(p'\cos Z-C')^2\end{array} + 2(p'\cos Y-B')(p'\cos Z-C')\sqrt{(B-p')(C-p')}$$

$$= \left[(p'\cos Y-B')\sqrt{(B-p')} + (p'\cos Z-C')\sqrt{(C-p')}\right]^2,$$

cioè, un risultato positivo; e per la sostituzione di p'', otterremo

$$-\left\{\begin{array}{l}(p''-B)(p''\cos Y-B')^2 \\ (p''-C)(p''\cos Z-C')^2\end{array} - 2(p''\cos Y-B')(p''\cos Z-C')\sqrt{(p''-B)(p''-C)}\right\}$$

$$= -\left[(p''\cos Y-B')\sqrt{(p''-B)} - (p''\cos Z-C')\sqrt{(p''-C)}\right]^2,$$

cioè, un risultato negativo.

D'altronde, secondochè nella (A) divisa per p^3, si fa $p=-\infty$, ovvero $p=\infty$, si ottiene un risultato negativo o positivo.

Pertanto l'equazione (A), facendo successivamente

$$p = -\infty, = p', = p'', = +\infty,$$

somministra in corrispondenza, nella fatta ipotesi,

$$- \quad + \quad - \quad + \;;$$

e però ha reali le sue tre radici.

Rappresentiamo con p' la più piccola, e con p'' la più grande delle due radici, in cia=

suna delle tre equazioni

$$(1)\left\{\begin{array}{l} p^2 \operatorname{sen}^2 X - (B + C - 2A'\cos X)p + BC - A'^2 = 0, \\ p^2 \operatorname{sen}^2 Y - (C + A - 2B'\cos Y)p + CA - B'^2 = 0, \\ p^2 \operatorname{sen}^2 Z - (A + B - 2C'\cos Z)p + AB - C'^2 = 0 \end{array}\right.$$

Risulta da ciò che precede, che delle tre radici L, M, N dell'equazione cubica, disposte in ordine di grandezza crescente, la prima è inferiore al più piccolo de' tre valori di p'; la seconda è intermedia tra il maggiore de' valori di p' ed il minore de' tre valori di p''.

Pongasi ora che due delle tre radici L, M, N, diventino eguali. Se sono le due più piccole L, M, dovranno esse necessariamente coincidere co' tre valori di p'; e, se sono le due più grandi M, N, co' tre valori di p''. Quindi, allorchè l'equazione cubica ha una radice doppia, questa radice dovrà verificare simultaneamente l'equazioni (1), e però l'eguaglianze

$$\begin{aligned}(p-A)(p-B)(p-C) &= (p-A)(p\cos X - A')^2 \\ &= (p-B)(p\cos Y - B')^2 \\ &= (p-C)(p\cos Z - C')^2 \\ &= (p\cos X - A')(p\cos Y - B')(p\cos Z - C'),\end{aligned}$$

ciascuna delle quali è contenuta nelle tre rimanenti.

Se da due delle medesime, soppresso il fattore comune, eliminiamo p^2, ne risulterà un'equazione di primo grado in p, che ci farà subito palese il valore della radice doppia dell'equazione cubica.

Facciamo, per abbreviare,

$$\begin{aligned} p\cos X - A' &= A_1 \quad, \\ p\cos Y - B' &= B_1 \quad, \\ p\cos Z - C' &= C_1 \quad; \end{aligned}$$

l'equazione cubica (A_1) prenderà la forma

$$(A_2) \qquad (p-A)(p-B)(p-C) - \begin{vmatrix} (p-A)A_1^2 \\ (p-B)B_1^2 \\ (p-C)C_1^2 \end{vmatrix} + 2A_1B_1C_1 = 0,$$

e l'eguaglianze precedenti daranno

$$p = A + \frac{B_1C_1}{A_1} = B + \frac{C_1A_1}{B_1} = C + \frac{A_1B_1}{C_1}.$$

Supponiamo finalmente che tutte e tre le radici dell'equazione cubica diventino eguali: dovranno esse necessariamente coincidere e co' tre valori di p', e co' tre valori di p'', dati dall'equazione (1). Quindi ciascuna di queste tre equazioni dovrà aver uguali le sue radici, e perciò darà rispettivamente

$$(B-C)^2 \operatorname{sen}^2 X + [(B+C)\cos X - 2A']^2 = 0,$$

$$(C-A)\operatorname{sen}^2 Y + [(C+A)\cos Y - 2B']^2 = 0,$$

$$(A-B)\operatorname{sen}^2 Z + [(A+B)\cos Z - 2C']^2 = 0;$$

donde

$$A = B = C$$

$$A' = A\cos X, \quad B' = A\cos Y, \quad C' = A\cos Z.$$

II

Cerco adesso di determinare le direzioni abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ degli assi principali della superficie di second'ordine, riportata ad assi obliquangoli.

Quando dirò che una retta ha la direzione lmn, intendasi che è parallela ad un'altra retta $= 1$ condotta per l'origine degli assi xyz, e la cui estremità ha per coordinate l, m, n: si avrà in questa ipotesi

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos X + 2nl\cos Y + 2lm\cos Z = 1.$$

Ciò posto, i valori degli elementi delle tre direzioni principali abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, sono, com'è noto, quelli

che nelle tre equazioni (pag. 190)

$$(p-A)l + C_1 m + B_1 n = 0\,,$$
$$(p-B)m + A_1 n + C_1 l = 0\,,$$
$$(p-C)n + B_1 l + A_1 m = 0\,,$$

prendono l, m, n, per ciascuna delle tre radici L, M, N dell'equazione cubica (A). Dalle due ultime di cotest'equazioni si ricava

$$\frac{l}{(p-B)(p-C)-A_1^2} = \frac{m}{A_1B_1 - C_1(p-C)} = \frac{n}{C_1A_1 - B_1(p-B)}\,.$$

Procuriamo di mettere questa proporzionalità sotto una forma più simmetrica. Chiamato V il primo membro dell'equazione cubica (A_1), si ha la identità

$$(p-A)V = [(p-C)(p-A) - B_1^2][(p-A)(p-B) - C_1^2] - [B_1C_1 - A_1(p-A)]^2\,.$$

Da qui, a cagione di $V=0$, e dal principio di simmetria, si deriva

$$B_1C_1 - A_1(p-A) = \sqrt{[(p-C)(p-A) - B_1^2][(p-A)(p-B) - C_1^2]}\,,$$
$$C_1A_1 - B_1(p-B) = \sqrt{[(p-A)(p-B) - C_1^2][(p-B)(p-C) - A_1^2]}\,,$$
$$A_1B_1 - C_1(p-C) = \sqrt{[(p-B)(p-C) - A_1^2][(p-C)(p-A) - B_1^2]}\,.$$

Il segno ± 1 di ciascun radicale, sarà dato dal primo membro, dopochè a p avremo surrogato una delle tre radici L, M, N.

In virtù di queste relazioni, la proporzionalità precedente assume la forma

$$\frac{l}{\sqrt{[(p-B)(p-C)-A_1^2]}} = \frac{m}{\sqrt{[(p-C)(p-A)-B_1^2]}} = \frac{n}{\sqrt{[(p-A)(p-B)-C_1^2]}}\,.$$

Ora, se eseguiamo tanto sopra i numeratori quanto sopra i denominatori di questi tre rapporti uguali, l'operazione che si vede eseguita sopra l, m, n nella formula

$$l^2+m^2+n^2+2mn\cos X + 2nl\cos Y + 2lm\cos Z = 1\,,$$

il rapporto de' risultati sarà eguale al quadrato di cia=

suno de' rapporti precedenti. Il numeratore di tale nuovo rapporto è evidentemente $=1$, e il denominatore si troverà, dopo convenienti riduzioni, essere il seguente

$$3H^2p^2-2\left\{\begin{array}{l}A\,\mathrm{sen}^2X\\B\,\mathrm{sen}^2Y\\C\,\mathrm{sen}^2Z\end{array}-2\left|\begin{array}{l}A'\,\mathrm{sen}Y\,\mathrm{sen}Z\cos X\\B'\,\mathrm{sen}Z\,\mathrm{sen}X\cos Y\\C'\,\mathrm{sen}X\,\mathrm{sen}Y\cos Z\end{array}\right.\right\}p+\left\{\begin{array}{l}BC-A'^2\\CA-B'^2\\AB-C'^2\end{array}-2\left|\begin{array}{l}(AA'-B'C')\cos X\\(BB'-C'A')\cos Y\\(CC'-A'B')\cos Z\end{array}\right.\right. ,$$

il quale, fatta la sostituzione delle radici L, M, N dell'equazione cubica (A), si trasforma in

$$H^2\left(3p^2-2(L+M+N)p+MN+NL+LM\right).$$

Dopo ciò, per determinare le direzioni principali abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, si avranno le formule semplicissime*

$$\left\{\begin{array}{l}a^2=\dfrac{(L-B)(L-C)-(L\cos X-A')^2}{H^2(L-M)(L-N)},\\[2ex] b^2=\dfrac{(L-C)(L-A)-(L\cos Y-B')^2}{H^2(L-M)(L-N)},\\[2ex] c^2=\dfrac{(L-A)(L-B)-(L\cos Z-C')^2}{H^2(L-M)(L-N)};\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}a'^2=\dfrac{(M-B)(M-C)-(M\cos X-A')^2}{H^2(M-N)(M-L)},\\[2ex] b'^2=\dfrac{(M-C)(M-A)-(M\cos Y-B')^2}{H^2(M-N)(M-L)},\\[2ex] c'^2=\dfrac{(M-A)(M-B)-(M\cos Z-B')^2}{H^2(M-N)(M-L)};\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}a''^2=\dfrac{(N-B)(N-C)-(N\cos X-A')^2}{H^2(N-L)(N-M)},\\[2ex] b''^2=\dfrac{(N-C)(N-A)-(N\cos Y-B')^2}{H^2(N-L)(N-M)},\\[2ex] c''^2=\dfrac{(N-A)(N-B)-(N\cos Z-C')^2}{H^2(N-L)(N-M)}.\end{array}\right.$$

---

* C. G. J. Jacobi, Crelle t. II. p. 232.

Roma 20 Febbrajo 1844.

D. Chelini d. S. P.

Ex
Biblioth. Regia
Berolinensi.

III